

# **Instability analysis using eigenvalues in large scale dynamical systems.**



Leo M. González  
Escuela de Computación de Alto Rendimiento (ECAR),  
Buenos Aires, 18-29 Septiembre 2017

# Introducción.

- La simulación computacional aporta información a bajo coste comparable a la obtenida en los experimentos.
- Los problemas actuales requieren modelos matemáticos complejos que demandan gran capacidad de cálculo.
- Importancia de la programación en ciencias e ingeniería.

## Objetivos

- Impartir una metodología orientada a la simulación de sistemas físicos.
- Entender los conceptos de estabilidad y cálculo de autovalores.
- Diseñar las herramientas computacionales que nos permitan evaluar el comportamiento y la estabilidad de un sistema físico complejo.

## Qué entendemos por Modelización Matemática?

- Descripción de ciertos fenómenos de la naturaleza mediante un número finito de ecuaciones.
- Diferencias entre la realidad y el modelo computacional:
  - Pequeños efectos físicos despreciados.
  - Aproximaciones numéricas (Procesos iterativos, errores de redondeo, etc...).
  - Aproximaciones geométricas.
  - A diferencia del mundo experimental la escala no es problema.

## Simulación de un sistema físico.

- Objetivo principal: Desarrollar un código específico para la predicción del comportamiento del sistema físico.
- Análisis de necesidades.
  - Definición del sistema físico. Qué física quiero simular?
  - Objetivos de la simulación. Qué información quiero conseguir?
- Estudio del problema.
- Implementación.
- Validación.

## Determinación del modelo matemático.

- Sistema de ecuaciones: EDOs, EDPs, sistema algebraico
- Condiciones de contorno (BC).
- Hipótesis para que el sistema matemático represente a la física.
- Existencia y unicidad de solución.
- Regularidad y posibles singularidades de la solución.

## Simulación de un sistema físico. Procedimiento

- Discretización espacial.
  - Necesidad de malla.
  - Tipo de mallado(estructurado/no estructurado).
  - Presencia de capas límite o discontinuidades (ondas de choque).
  - Esquema numérico (VOF,FEM,DF,espectral)
- Discretización temporal: estabilidad numérica.
- Coste computacional: tiempo de ejecución y memoria necesaria.

## Simulación de un sistema físico. Implementación.

- Elaboración de un código.
- Compilación y ejecución.
- Voilà!! Ya tenemos una "solución".



## Simulación de un sistema físico. Análisis Computacional

- Tiempos de ejecución.
- Optimización del código.
- Coste de memoria.
- Evaluar la necesidad de paralelización.

## Cómo modelar un sistema físico?.

- Leyes fundamentales (por ejemplo...):
  - Conservación de la masa.
  - Conservación de momento.
  - Conservación de energía.
  - etc...
- Información extra:
  - Ecuaciones de estado.
  - Condiciones de contorno.

⇒ Llegamos a un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales no lineal.

- Evaluamos la dificultad analítica de la solución.
- Asumimos el alto coste y la dificultad de los experimentos.

⇒ **Solución numérica.**

## Complejidad e inestabilidad de sistemas físicos.

- Complejidad = No linealidad.

Sistema en el que los outputs no son proporcionales a los inputs. La mayoría de los sistemas son inherentemente no lineales en la naturaleza. Los sistemas no lineales pueden parecer caóticos, impredecibles, contraintuitivos a diferencia de lo simple de los lineales.

## Complejidad e inestabilidad de sistemas físicos.

- Inestabilidad = Cambio ante una perturbación.

Se estudia la estabilidad de una solución ante pequeñas perturbaciones de la misma. Bajo ciertas circunstancias, la estabilidad de un sistema queda reducida al estudio de un problema de autovalores.

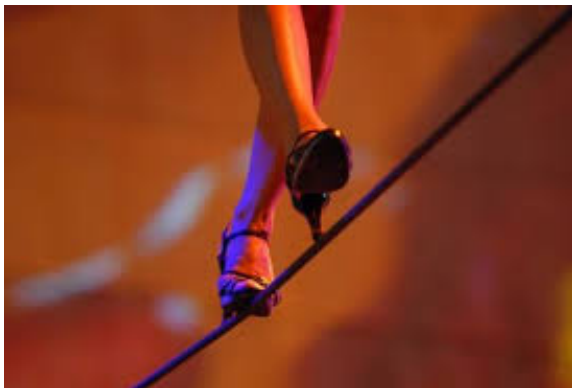
## Estudio de la estabilidad de un sistema dinámico.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), t)$$

El sistema de ecuaciones puede ser no lineal, pero entonces habrá que estudiar su linealización entorno a:

- Puntos de equilibrio:  $\mathbf{x}_0$  tales que  $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = 0$
- Solución particular

## Estudio de la estabilidad de un sistema dinámico.



## Estudio de la estabilidad de un sistema dinámico.



## Linealización entorno a un punto de equilibrio $\mathbf{x}_0$ .

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \varepsilon \tilde{\mathbf{x}}$$

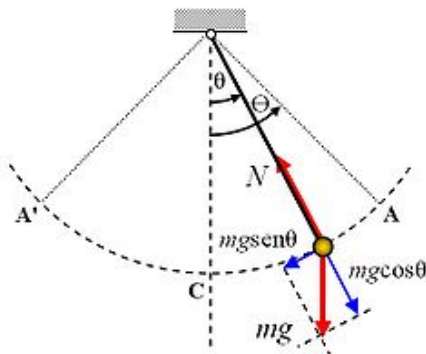
Sustituyendo en la ecuación  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), t)$  obtenemos:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0} \tilde{\mathbf{x}}(t)$$



## Ejemplo: Péndulo simple.

Se tiene un péndulo de masa  $m$  suspendido por una cuerda de longitud  $l$  bajo la acción gravitatoria  $g$ , donde consideramos  $\theta \ll 1$ .



$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin(\theta)$$

## Paso 1. Transcripción de las ecuaciones.

- Lo primero es pasar de una ecuación en derivada segunda a un sistema de EDOs.

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -\frac{g}{l} \sin(y_1) \approx -\omega^2 y_1\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}\mathbf{y}$$

## Estudio de la estabilidad de un péndulo

Lo haremos a través de los autovalores de la matriz  $A$ . Sea  $\lambda = \sigma + i\omega$  un autovalor de  $A$ .

- La parte real  $\sigma$  de los autovalores de  $A$  marca la estabilidad del sistema y la parte imaginaria  $\omega$  la frecuencia del mismo.
- Si **algún** autovalor tiene  $\sigma > 0$  entonces el sistema es inestable.
- Si **todos** los autovalores tienen  $\sigma < 0$  entonces el sistema es amortiguado.

## Estudio de la estabilidad de un péndulo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Diagonalizando

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} i\omega & 0 \\ 0 & -i\omega \end{pmatrix}$$

Ambos autovalores tienen parte real nula  $\Rightarrow$  Sistema es estable.  
Ver Matlab.

## Estudio de la estabilidad de un péndulo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Diagonalizando

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} i\omega & 0 \\ 0 & -i\omega \end{pmatrix}$$

Luego el sistema es estable, pero no es amortiguado.

## Ejercicio 1. Matlab

Péndulo gravitatorio.

```
1
2
3 equations = @(t,x) Ecs_pendulo(t,x,m,l,gamma,g
    );
4 [tout,xout]=ode23s(equations,[0 T],[x_0 v_0]);
5 plot(tout,xout(:,1));
```

## Ejercicio 1. Matlab

Oscilador armonico amortiguado.

```
1 function dydt = Ecs_pendolo(t,y,l,g)
2
3 dydt = zeros(2,1);
4 dydt(1) = y(2);
5 dydt(2) = - g*y(1)/l;
```

## Presencia de amortiguación.

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta + 2\gamma \dot{\theta} = 0$$

$$\dot{y}_1 = y_2$$

$$\dot{y}_2 = -\omega^2 y_1 - 2\gamma y_2$$



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\gamma \end{pmatrix}$$

Diagonalizando

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -\gamma + i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} & 0 \\ 0 & -\gamma - i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} \end{pmatrix}$$

Luego el sistema es estable y se amortigua hasta la posición de equilibrio  $(y_1, y_2) = (0, 0)$ .

## Ejercicio 2. Reto?

Estudiar la estabilidad de las ecuaciones de rotación de un sólido rígido (**Ecuaciones de Euler**).

- Google: Euler equations (rigid body dynamics)
- $\vec{M}_{ext} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = 0$
- $\vec{\omega} = \omega \vec{u}$
- $I$  es el tensor de inercia, matriz constante y diagonal.
- $\frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = I \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{\omega} \times I \vec{\omega} = 0$
- Calcular los 3 puntos de equilibrio.
- Linealizar las ecuaciones de Euler en torno a los tres puntos de equilibrio.
- Calcular los autovalores en cada uno de los 3 casos.

## Inestabilidad y autovalores.

- La solución de un sistema de EDOS lineal o linealizado en torno a una solución es una suma de exponenciales. Los exponentes nos dan la clave del comportamiento.
- Que pasa con un sistema cuando el tiempo crece  $t \rightarrow \infty$ .
- Unos modos caen más rápido que otros.
- Algunos no sólo no decaen sino que crecen.

### Ejemplos:

- La turbulencia no es más que perturbaciones que han crecido y no se han amortiguado.
- La mala convergencia de un algoritmo numérico implica la presencia de un autovalor que impide una buena convergencia.

## Por qué los autovalores son importantes?.

Permiten estudiar la evolución de una solución, pero además...

- Desacoplamiento del problema.
- Cálculo de resonancias.
- Estabilidad.
- Permiten clasificar matrices.

## Cálculo de autovalores.

$$Aq = \lambda q$$

- Los autovalores de una matriz real son?
- Los autovalores de una matriz real simétrica son?
- Los autovalores de una matriz compleja son?

## Tipos de problemas de autovalores.

Problema tipo

$$Aq = \lambda q$$

Problema generalizado

$$Aq = \lambda Bq$$

Problema generalizado cuadrático

$$Aq = \lambda Bq + \lambda^2 Cq$$

## Métodos de cálculo de autovalores.

$$Aq = \lambda Bq$$

En general no necesitamos todos los autovalores, sino **aquellos que determinan la estabilidad del sistema.**

- Raíces del Polinomio característico.
- Power iteration method. Ver Matlab.
- Householder. Ver Matlab
- Transformaciones hasta obtener una matriz sub/super diagonal (Hessenberg matrix): QR and QZ (Matlab).
- Arnoldi method.
- Shift and inverse.

## Métodos de cálculo de autovalores.

$$Aq = \lambda Bq \Rightarrow B^{-1}Aq = \lambda q$$

La estabilidad del sistema queda determinada por aquellos autovalores  $\sigma > 0$ .

- El algoritmo de Arnoldi nos da los autovalores de módulo mayor con mejor precisión.
- Nos interesa la zona donde  $\sigma = 0 \Rightarrow$  Inverse problem:

$$\frac{1}{\lambda}q = A^{-1}Bq$$

- Que ocurre si busco autovalores de alta frecuencia. Shift problem.

$$\frac{1}{\lambda - \sigma}q = (A - \sigma B)^{-1}Bq$$



## Power iteration method.

$$Aq = \lambda q$$

Se calcula el autovalor de mayor valor  $\lambda_{max}$ .

- Choose  $x_0$
- Loop  $n=0 \dots \text{tolerance}$
- Normalize  $x_{n+1} = \frac{A \cdot x_n}{\|A \cdot x_n\|}$
- Check residual  $\|x_{n+1} - x_n\| < \textit{Tolerance}$
- END Loop
- $\lambda_{max} = (A \cdot x_{n+1}) \cdot x_{n+1}$
- Corresponding eigenvector  $x_{n+1}$

## Power iteration method. Ejercicio 3

Calcula el autovalor de mayor valor  $\lambda_{max}$  y el de menor valor en los siguientes casos:

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$
- wilkinson(n) de grado 7
- $A = \text{Rosser matrix}$

## Householder transformations.

$$Aq = \lambda q$$

Se realizan transformaciones de semejanza de modo que la matriz transformada conserva los autovalores.

- Se calcula una matriz de paso  $P$  ortogonal.
- $A_{transf} = P \cdot A \cdot P'$
- $eig(A_{transf})$

## QR algorithm

$$Aq = \lambda q$$

Descompongo la matriz  $A = A_0$  en el producto de dos matrices tal que  $A_k = QR$  donde  $Q_k$  es ortogonal y  $R_k$  triangular superior.

- Ortogonalización  $A_k$  mediante Gram-Schmidt.

$$A_k = I \cdot A_k = Q_k \cdot Q_k' \cdot A_k$$

- Hallamos la matriz  $R_k = Q_k' \cdot A_k$

- Calculo la matriz semejante

$$A_{k+1} = R_k Q_k = Q_k' Q_k R_k Q_k = Q_k' A_k Q_k$$

- Bajo ciertas condiciones e iterando,  $A_{k+1}$  pasa a ser una matriz triangular cuyos autovalores están en la diagonal.

## QZ algorithm, empleado por Matlab como **eig eigs**

$$Aq = \lambda Bq$$

Tambien conocido como descomposición de Schur generalizada.  
Descompongo las matrices  $A$  y  $B$  tal que:

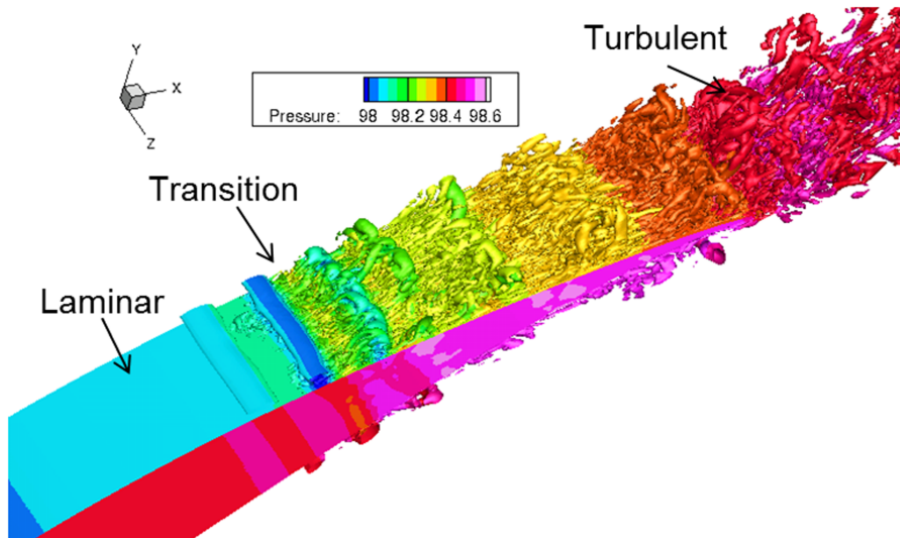
$$A = QSZ' \quad B = QTZ'$$

donde  $Q$  y  $Z$  son unitarias y  $S$  y  $T$  son triangulares superiores.

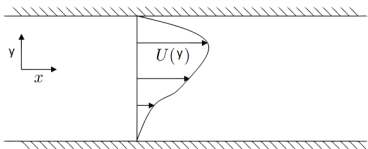
- Realizamos una descomposición de Schur de las matrices  $A$  y  $B$ .
  - $A_k = Q_k \cdot S_k \cdot Z'_k$
  - $B_k = Q_k \cdot T_k \cdot Z'_k$
- Calculo las matrices semejantes:
  - $A_{k+1} = Q'_k A_k Z_k$
  - $B_{k+1} = Q'_k B_k Z_k$

y por tanto  $A_{k+1} B_{k+1}^{-1} = Q'_k A_k B_k^{-1} Q_k$

## Ecuación de Orr-Sommerfeld.



## Ecuación de Orr-Sommerfeld.



- La ecuación de Orr-Sommerfeld es un ejemplo que permite evaluar la estabilidad de un flujo de velocidad característica  $U_0$ .
- <http://www.cdsimpson.net/2015/04/derivation-of-orr-sommerfeld-equation.html>
- Fluido **incompresible** de densidad  $\rho$ , viscosidad  $\mu$ .
- Adimensionalizando Navier-Stokes: número de Reynolds  

$$Re = \frac{\rho U_0 h}{\mu}$$
- Problemas de autovalores 1D.

# Orr-Sommerfield.

- Supongamos un flujo  $\mathbf{U} = (U(y), 0, 0) = (1 - y^2, 0, 0)$  solución de las ecuaciones de Navier-Stokes entre dos placas planas paralelas infinitas (Plane Poiseuille flow).
- Perturbamos este sistema  $\mathbf{u} = \mathbf{U} + \varepsilon(\hat{u}(y), \hat{v}(y), 0)e^{-i\omega t}e^{i\alpha x}$
- Haciendo uso de  $\hat{\mathbf{u}} = \nabla\varphi$
- Las condiciones de contorno son:  $\varphi(\pm 1) = 0$  y  $\frac{d\varphi(\pm 1)}{dx} = 0$

$$\frac{1}{i\alpha Re} \left( \frac{d^2}{dz^2} - \alpha^2 \right)^2 \varphi = (U - c) \left( \frac{d^2}{dz^2} - \alpha^2 \right) \varphi - U''\varphi$$



## Orr-Sommerfeld.

La ecuación de Orr-Sommerfeld se puede escribir del siguiente modo

$$\frac{1}{Re} \left( \frac{d^4}{dz^4} - 2 \frac{d^2}{dz^2} + 1 \right) \varphi - 2i\varphi - iU \left( \frac{d^2}{dz^2} - 1 \right) \varphi = \lambda \left( \frac{d^2}{dz^2} - 1 \right) \varphi$$

Esto permite definir los operadores A y B

$$A = \frac{1}{Re} \left( \frac{d^4}{dz^4} - 2 \frac{d^2}{dz^2} + 1 \right) - 2i - iU \left( \frac{d^2}{dz^2} - 1 \right)$$

y

$$B = \left( \frac{d^2}{dz^2} - 1 \right)$$

# Arnoldi Algorithm.

- Loop  $j=1 \dots$  Krylov subspace dimension
- Choose  $v_0$
- Normalize  $v_0 = v_0 / \|v_0\|$
- Matrix-vector product  $B \cdot v_0 = w$
- Impose Dirichlet BC on  $w$
- **Solve linear system  $A \cdot w = w$**  Direct-Iterative
- loop  $i = 1 \dots j$ 
  - $H(i, j) = v_i \cdot w$
  - $w = w - H(i, j) \cdot v_i$
- ENDDO
- Impose Dirichlet BC on  $w$
- $H(j+1, j) = \|w\|$
- $v_{j+1} = w / H(j+1, j)$
- ENDDO

## Ecuación de Helmholtz

$$\nabla^2 \varphi + \lambda^2 \varphi = 0$$

Google: Helmholtz equation acoustics

## Cálculo de resonancias. Ecuación de Helmholtz

$$\nabla^2 \varphi + \lambda^2 \varphi = 0$$

- Flujo base en reposo  $\mathbf{U} = (0, 0, 0)$  y  $p = P_0$  (solución de las ecuaciones de Navier-Stokes)
- Cavidad cerrada de longitud característica  $D$  y fluido con velocidad del sonido  $c$ .
- Asumimos número de Reynolds  $Re \rightarrow \infty$
- Perturbamos este sistema  

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} + \varepsilon(\hat{u}(x, y), \hat{v}(x, y), 0)e^{-i\omega t}e^{i\alpha cx}$$

$$p = P_0 + \varepsilon\hat{p}(x, y)e^{-i\omega t}e^{i\alpha cx}$$
- Haciendo uso de  $u = \nabla \varphi$  y  $p = i\lambda\rho\varphi$  donde  $\lambda$  es el número de onda adimensional  $\lambda = \frac{\omega D}{c}$

# Métodos de resolución

$$\nabla^2 \varphi + \lambda^2 \varphi = 0$$

- Dos posibilidades: QZ (directo) o Arnoldi (iterativo).
- Matrices llenas o sparse.
- Metodo espectral de alto orden.
- Creación de las matrices de masa (B) y rigidez (A).
- Imposición de condiciones de contorno.
- Resolución del problema.

## Cavidad cuadrada

$$\nabla^2 \varphi + \lambda^2 \varphi = 0$$

- Vamos a resolver la ecuación de Helmholtz en un dominio cuadrado de lado  $L = 2$  en  $[-1, 1] \times [-1, 1]$
- Boundary conditions  $\varphi = 0$

Solución:

$$\lambda_{m,n}^2 = \frac{\pi^2}{4}(n^2 + m^2) \quad n, m = 1, 2, 3, \dots$$

$$\varphi_{m,n} = \sin(k_x(x+1)) \sin(k_y(y+1)) = \sin(i(x+1)\frac{\pi}{2}) \sin(j(y+1)\frac{\pi}{2})$$

# Biglobal stability of the Navier-Stokes equations.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}, \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= 0,\end{aligned}$$

A particular quasi-steady solution (BASE FLOW)  $\bar{q} = (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{p})$  is computed by a DNS/RANS solver.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2}, \\ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} &= 0,\end{aligned}$$

## Linearized Navier-Stokes equations.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}, \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= 0,\end{aligned}$$

The base flow solution  $(\bar{u}_i, \bar{p})$  is perturbed such as  $u_i = \bar{u}_i + \epsilon \hat{u}_i$  and  $p = \bar{p} + \epsilon \hat{p}$  where  $\epsilon \ll 1$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} + \hat{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} &= -\frac{\partial \hat{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \hat{u}_i}{\partial x_j^2}, \\ \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_i} &= 0,\end{aligned}$$



## Global linear theory.

Triglobal

$$\overline{Q}(x, y, z) + \varepsilon \widehat{q}(x, y, z) e^{-i\omega t}$$

Biglobal

$$\overline{Q}(x, y) + \varepsilon \widehat{q}(x, y) e^{i\beta z - i\omega t}$$

Orr-Sommefeld

$$\overline{Q}(y) + \varepsilon \widehat{q}(y) e^{i\beta x - i\omega t}$$

## Frequency domain solution.

The ansatz used for the problem is:

$$\begin{aligned}\hat{u}_i(x, y, z, t) &= \hat{u}_i(x, y) e^{i\beta z} e^{i\omega t}, \\ \hat{p}(x, y, z, t) &= \hat{p}(x, y) e^{i\beta z} e^{i\omega t},\end{aligned}$$

complex BiGlobal eigenvalue problem:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathcal{L} & -\partial_y \bar{u} & -\partial_z \bar{u} & i\beta \\ 0 & \mathcal{L} - \partial_y \bar{v} & -\partial_z \bar{v} & \partial_y \\ 0 & -\partial_y \bar{w} & \mathcal{L} - \partial_z \bar{w} & \partial_z \\ i\beta & \partial_y & \partial_z & 0 \end{pmatrix}}_{A(\text{Re}, \beta)} \begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \\ \hat{p} \end{pmatrix} = -i\omega \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \textcolor{red}{0} & \textcolor{red}{0} & \textcolor{red}{0} & \textcolor{red}{0} \end{pmatrix}}_B \begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \\ \hat{p} \end{pmatrix}$$

Complex eigenvalue  $\omega = \omega_r + i\omega_m \Rightarrow e^{i\omega t} = e^{i\omega_r t} e^{-\omega_m t}$ . STABLE if  $\omega_m > 0$  or UNSTABLE  $\omega_m < 0$ .

$$\text{where } \mathcal{L} = \frac{1}{\text{Re}} (\partial_y^2 + \partial_z^2 - \beta^2) - i\beta \bar{u} - \bar{v} \partial_y - \bar{w} \partial_z$$

## Eigenvalue problem solution: Arnoldi method.

Generalized eigenvalue problem  $Aq = i\omega Bq$

$$A \begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \\ \hat{p} \end{pmatrix} = i\omega B \begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \\ \hat{p} \end{pmatrix}$$

This problem gives the eigenvalues with highest module. If  $A$  is inverted the solution is focused on the origin of the complex plane.

Comments:

- Shifting: translation of the origin of the complex plane.
- As  $B$  is not invertible  $\Rightarrow A^{-1}$ . LU sparse direct solver.

## Examples and Applications.

- Confined flows: cavities and ducts.
- Elliptic instability of vortex systems.
- Bluff bodies.
- Boundary layer transition.
- Buffet phenomenon at compressible and turbulent flow.

## Isolated Batchelor vortex.

- 3D Base flow: a Jet Flow  $\bar{w}$  is present along the Z direction.
- No assumption on the azimuthal symmetry is considered for the analysis.
- Huge domains compared to the vortex size are used in order to use Dirichlet BC.
- Hybrid mesh (quadrilateral + triangles).

$$\bar{u}(x, y) = -qy \frac{1 - e^{-r^2}}{r^2},$$

$$\bar{v}(x, y) = qx \frac{1 - e^{-r^2}}{r^2},$$

$$\bar{w}(x, y) = e^{-r^2}$$

## Exercise Isolated Batchelor Vortex

- $Re=1200$   $\alpha = 2.0$   $q = 0.8$  300 elements  $p = 6$

## Que se hace cuando el tamaño de la matriz no entra en la computadora?

### Paralelización.

- Reparto de la matriz sparse (no contiene ceros estructurales)
- La matriz se basa en tres vectores: filas IRN , columnas JCN, valor A.
- Llamemos al tamaño de dichos vectores NZ y el número de procesadores *size*
- La numeración de los procesadores va de  $i = 0, \dots, size - 1$
- $NZloc = NZ / size$
- Mandamos bloques **mpisend** IRN(1:NZloc) , JCN(1:NZloc), A(1:NZloc) del procesador 1 al procesador  $size - 2$
- Mandamos el sobrante al procesador al procesador  $size - 1$
- El procesador 0 se queda con el primer bloque.
- Los procesadores reciben la información: **mpirecv**

## Modos de vibración de una viga de Euler-Bernoulli.

Se pretende los modos de vibración de una riser bajo la acción de diversas fuerzas:

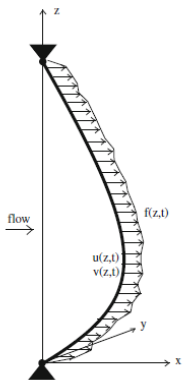


Fig. 1 Schematic of the cylinder model and Cartesian reference system. Displacements  $u(z, t)$  and  $v(z, t)$  along the  $x$  and  $y$  axes, respectively, and the hydrodynamic forcing  $f(z, t)$  appear indicated in the figure

- Acción de las corrientes marinas.
- 2 grados de libertad = desplazamientos  
 $\mathbf{u} = (u, v)$ .
- Acción de la gravedad y masa añadida  
 $m(z) = (c_m + 1)\rho_s$
- Pretensión  
 $T(z) = T_t - w_s(L - z)$



## Modos de vibración de una viga de Euler-Bernoulli.

$$EI \frac{\partial^4 \mathbf{u}}{\partial z^4} - \frac{\partial}{\partial z} \left( T(z) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right) + c \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + m(z) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = f(z, t)$$

$$m(z) = (c_m + 1) \rho_s$$

$$T(z) = T_t - w_s(L - z)$$

Boundary conditions:

$$u(0, t) = 0$$

$$u(L, t) = 0$$

$$\frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u(L, t)}{\partial z^2} = 0$$

## Fuerzas hidrodinámicas.

$$f_x = \frac{1}{2}\rho UD\left[C_d\left(U_r - \frac{U_r}{U}\frac{\partial u}{\partial t}\right) + C_l\right] + \frac{1}{2}\rho U^2 DC'_d \sin(\omega_x t)$$

$$f_y = \frac{1}{2}\rho UD\left[C_l\left(U_r - \frac{U_r}{U}\frac{\partial u}{\partial t}\right) - C_d\right] + \frac{1}{2}\rho U^2 DC'_l \sin(\omega_y t)$$

$$EI \frac{\partial^4 \mathbf{u}}{\partial z^4} - \frac{\partial}{\partial z} \left( T(z) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right) + c_{xx} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + c_{xy} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + m(z) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = f(t)$$

$$EI \frac{\partial^4 \mathbf{u}}{\partial z^4} - \frac{\partial}{\partial z} \left( T(z) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right) + c_{yy} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + c_{yx} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + m(z) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = g(t)$$

## Fuerzas hidrodinámicas.

- Discertizando las derivadas espaciales
- Asumiendo una dependencia armónica en las temporales
- $u(z, t) = \hat{u}e^{\omega t}$        $v(z, t) = \hat{v}e^{\omega t}$
- Busco los modos de vibración, el lado derecho no interviene en el problema.

$$Au + c_{xx}\omega u + c_{xy}\omega v + \omega^2 Mu = 0$$

$$Av + c_{yy}\omega v + c_{yx}\omega u + \omega^2 Mv = 0$$

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xy} \\ c_{yx} & c_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \omega^2 \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

## Otros problemas...

- Rayleigh-Taylor instability.
- Mixing layer.
- Biglobal instability, curved cavity.

## Donde están los límites

- Stiff  $A$  matrix.
- Huge  $A$  matrix.
- Example: The buffet problem.